http://www.rubenprofe.com.ar
ruben@rubenprofe.com.ar

FUERZA ELECTRO MOTRIZ Y RESISTENCIA INTERNA DE UNA PILA

Introducción:

En la figura 1 se muestra un circuito de dos resistencias **R_1 y R_2** conectadas en serie, este grupo a su vez está conectado en serie con una pila ideal que aplica una fuerza electro motriz **e**, este circuito simple también se suele llamar malla.

El funcionamiento del circuito es el siguiente:

Desde el extremo positivo de la pila salen cargas positivas que formarán una corriente eléctrica que circulará por la sección roja del conductor llegando a la resistencia R_1, la atravesará y a la salida continuará por la sección verde del conductor para luego atravesar ahora la resistencia R2 y continuará por la sección azul del conductor hasta llegar a la pila, ingresará a ella por el polo negativo, completando el circuito.

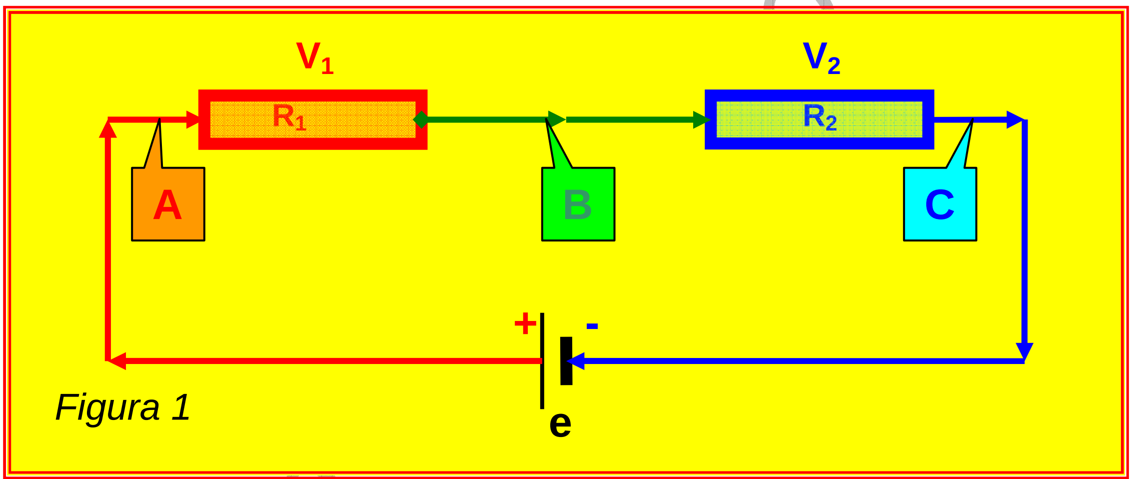

Figura 1

PROPIEDADES DEL CIRCUITO DE DOS RESISTENCIAS EN SERIE

1.- Por todos los puntos del circuito en serie pasa la misma intensidad de corriente.
2.- La caída de potencial entre los puntos A y C, extremos del conjunto de resistencias, es igual a la fem aplicada.
3.- La resistencia total del circuito serie es igual a la zuña de las resistencias que lo integran.

Ejemplo numérico para un circuito simple con pila ideal: (**r_i=0**)

Consideremos un circuito similar al de la figura 1 con los siguientes datos:
Resistencias: $R_1 = 6$ Ohm, $R_2 = 4$ Ohm y **$r_i = 0$ Ohm.**
Pila ideal e = 20 Volt.

Calcular la resistencia total del circuito, la intensidad de la corriente que circula, la caída de potencial en R_1 y la caída de potencial en R_2.

Consideremos la nomenclatura que usaremos en el desarrollo del ejemplo:

La **resistencia** total del circuito será $\mathbf{R_{12}}$
Intensidad de la corriente total que circula por el circuito = **i**
Intensidad de la corriente que circula por $\mathbf{R_1}$ = $\mathbf{i_1}$
Intensidad de la corriente que circula por $\mathbf{R_2}$ = $\mathbf{i_2}$
Caída de potencial rotal en las resistencias $\mathbf{R_{12}}$ = $\mathbf{V_A-V_C}$
Caída de potencial en $\mathbf{R_1}$ = $\mathbf{V_A-V_B = V_1}$
Caída de potencial en $\mathbf{R_2}$ = $\mathbf{V_B-V_C = V_2}$

Tabla de datos:

	R(Ω)	i(A)	V(V)
R_1	6	¿?	¿?
R_2	4	¿?	¿?
$R_{12} = R_1 + R_2$	¿?	¿?	20
e			20

Cálculo de la resistencia total del circuito de dos resistencias en serie:

$$R_{12} = R_1 + R_2$$
$$R_{12} = 6\Omega + 4\Omega = 6\Omega$$

Cálculo de la intensidad de corriente total que circula por el circuito:

$$i = \frac{V_A - V_C}{R_{12}}$$
$$i = \frac{20V}{10\Omega} = 2A$$

Cálculo de las intensidades de corriente que circulan por R_1 y R_2

Por tratarse de un circuito de dos resistencias en serie, por las dos circula la misma intensidad de corriente, entonces:

$$i = i_1 = i_2 = 2A$$

Cálculo de las caídas de potencial en $R_1=V_1$ y en $R_2=V_2$

Aplicando la fórmula de la ley de Ohm $V=R\times i$ tendremos

$$V_1 = R_1 \times i_1 \qquad V_2 = R_2 \times i_2$$
$$V_1 = 6\Omega \times 2A = 12V \qquad V_2 = 4\Omega \times 2A = 8V$$

Tabla de resultados:

n° de elemento	R(Ω)	i(A)	V(V)
R_1	6	2	12
R_2	4	2	8
$R_{12} = R_1 + R_2$	10	2	20
e			20

Ejemplo numérico con pila real ((**$r_i \neq 0$**)

En la figura 2 se colocó la resistencia interna de la pila, esto significa que en el circuito hay dos resistencias: la resistencia **R_1** externa a la pila y la

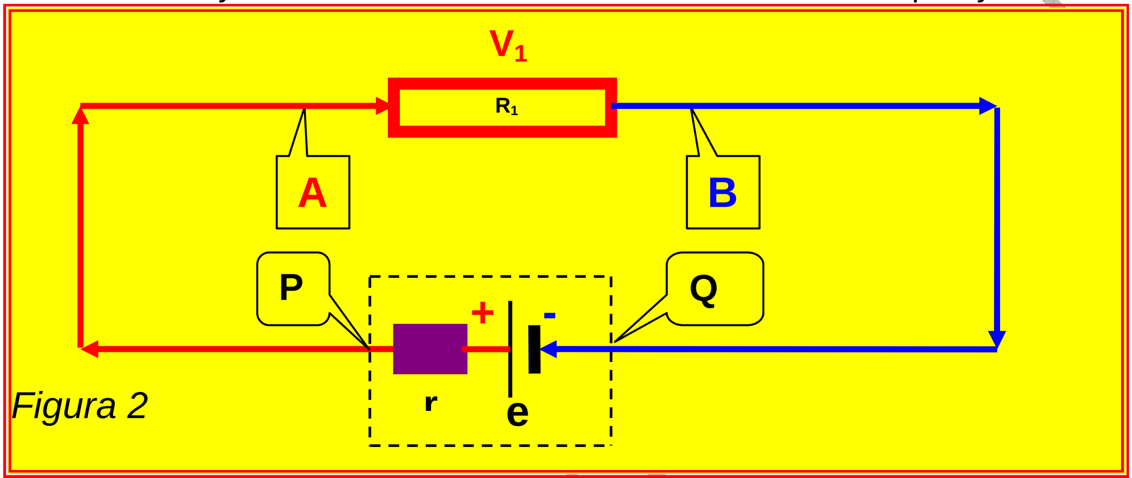

Figura 2

resistencia r interior a la pila.

Consideremos el circuito de la figura 2, con los siguientes datos:
Resistencias R_1= 9 Ohm, r = 1 Ohm
Pila ideal e=20 Volt.

Nota importante; si en los datos no se indica el valor de la resistencia interna de la pila, se considera pila ideal con resistencia interna = 0 Ohm. Algunas veces se aclara que se trata de una pila ideal, pero en algunos problemas, en los que se pide calcular la fem, no se menciona la resistencia interna de la pila a pesar que se trata de una pila real!!! Esto lleva a errores de cálculo, hay que estar atento al problema.

Calcular la resistencia total del circuito; la intensidad de la corriente que circula por el circuito; la caída de potencial en R_1 y la caída de potencial en r.

Consideremos la nomenclatura que usaremos en el desarrollo del ejemplo:

La **resistencia total** del circuito será **R_{1r}**
Intensidad de la corriente **total** que circula por el circuito = **i**
Intensidad de la corriente que circula por **R_1** = **i_1**
Caída de potencial rotal en la resistencia **R_1** = **V_A-V_B**
Diferencia de potencial en la **pila** es = **V_P - V_Q** = **r i – e**
Caída de potencial **en r** = **V_r**

Tabla de datos:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(A)	V(V)
R	9	¿?	¿?
r	1	¿?	¿?
$R_t = R + r$	¿?	¿?	¿?
e			20

Partiendo de la tabla se procede así:
1.- Cálculo de la resistencia total:

$$\boxed{R_t = R + r = 9\Omega + 1\Omega = 10\Omega}$$

2.- Cálculo de la intensidad total que circula por el circuito serie:

$$\boxed{i = \frac{e}{R_t} = \frac{20V}{10\Omega} = 2A}$$

3.- Considerando que la misma intensidad atraviesa las dos resistencias se calcularán las caídas de tensión en R y r.

$$\boxed{V_R = R \times i = 9\Omega \times 2A = 18V} \qquad \boxed{V_r = r \times i = 1\Omega \times 2A = 2V}$$

Tabla de resultados:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(A)	V(V)
R	9	2	18
r	1	2	2
$R_t = R + r$	10	2	20
e			20

Nota:

La fem de la pila es de 20 volt, pero la diferencia de potencial que entrega *para esa intensidad* es de 18 Volt porque se debe restar al valor de la fem la caída en la resistencia interna de la pila.

Ejemplo 2.

Supongamos ahora que la pila está bastante usada y la resistencia interna aumentó a 10Ω, con este nuevo dato tendremos la siguiente tabla:

Tabla de datos:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(A)	V(V)
R	9	¿?	¿?
r	11	¿?	¿?
$R_t = R + r$	¿?	¿?	20

Siguiendo los pasos del problema anterior:
1.- Cálculo de la resistencia total:

$$\boxed{R_t = R + r = 9\Omega + 11\Omega = 10\Omega}$$

2.- Cálculo de la intensidad total que circula por el circuito serie:

$$\boxed{i = \frac{e}{R_t} = \frac{20V}{20\Omega} = 1A}$$

3.- Considerando que la misma intensidad atraviesa las dos resistencias se calcularán las caídas de tensión en **R** y **r**.

$$\boxed{V_R = R \times i = 9\Omega \times 2A = 18V}$$

$$\boxed{V_r = r \times i = 1\Omega \times 2A = 2V}$$

Tabla de resultados:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(A)	V(V)
R	9	1	9
r	11	1	11
$R_t = R + r$	20	1	20

De acuerdo a lo visto la intensidad entregada por la pila descendió a la mitad, es lo mismo que decir que la pila entrega menos energía, se está descargando.

Cuadro comparativo de las características de las **pilas ideal** y **real**

	Pila ideal:	**pila real:**
Resistencia interna	no tiene	tiene con un valor variable, pequeño cuando es nueva y muy grande al final
fem	valor constante	valor constante
diferencia de potencial	valor constante V_a-V_b = fem	valor variable: V_a-V_b = fem - ri
energía consumida	no consume energía	se calienta porque consume la energía $\mathbf{E = r\, i^2\, t}$
energía entregada	V i	$Vi - r\,i^2$

Ejemplo práctico:

La figura siguiente esquematiza una pila real, con la correspondientes resistencia interna $\mathbf{r_i}$ y fem **e**.

El sector gris representa el interior de la pila que se encuentra conectada al exterior en los puntos P y Q que funcionan como polos positivo y negativo respectivamente.

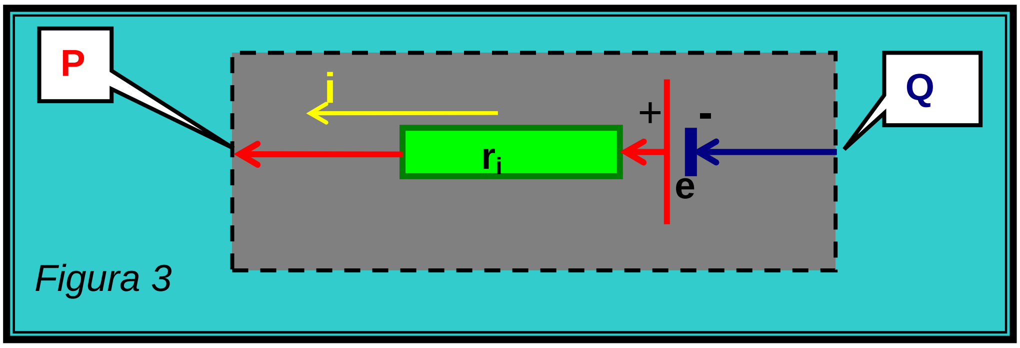

Figura 3

Para calcular la diferencia de potencial **V_P-V_Q** se debe aplicar la siguiente fórmula, deducida en base a la ley de las mallas de kirchhoff.

$$V_P - V_Q = r_i \times i - e$$

Se aplican las **reglas de los signos** de la ley de **Kirchhoff**:

1.- La caída de potencial producida por una resistencia será.

Positiva si el sentido de circulación es igual al sentido de la corriente.
Negativa si el sentido de circulación es opuesto al sentido de la corriente.

2.- El signo de la fuerza electromotriz es el que corresponde al signo por el cual se sale al atravesar la pila.

Recorriendo el camino entre P y Q estaremos moviéndonos en sentido contrario a la corriente, entonces la caída de potencial en la resistencia tendrá valor negativo, mientras que cuando se atraviesa la pila se sale por el polo negativo, entonces el valor de la fem será negativo.

$$\begin{aligned} V_P - V_Q &= -0.5\Omega \times 1A - (-1.5V) \\ V_P - V_Q &= -0.5V + 1.5V \\ V_P - V_Q &= 1\ V \end{aligned}$$

Suponiendo que la pila se encuentre desconectada, no circula corriente eléctrica, entonces no hay caída de potencial en la resistencia interna:

$$\begin{aligned} V_P - V_Q &= -0.5\Omega \times 0A - (-1.5V) \\ V_P - V_Q &= 0\ V + 1.5V \\ V_P - V_Q &= 1{,}5\ V \end{aligned}$$

La **diferencia de potencial** es igual al **valor de la fem**

Si ahora se recorre el circuito en el sentido contrario, es decir, desde Q hasta P y se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$\begin{aligned} V_Q - V_P &= 0.5\Omega \times 1A - (1.5V) \\ V_P - V_Q &= 0.5V - 1.5V \\ V_P - V_Q &= -1\ V \end{aligned}$$

Se obtiene como resultado que la diferencia de potencial es de **-1 Volt**, el resultado opuesto al obtenido cuando se recorrió el circuito desde el punto P al punto Q. En efecto, el potencial del punto P es menor que el potencialñ del punto Q.

Regla general:

Para calcular la diferencia de potencial entre los bornes P y Q de la pila, se debe recorrer el circuito desde P hasta Q, atravezando la pila y aplicar la fórmula adecuada y las reglas de la ley de Kirchhoff.

NOTA

Muchas veces para expresar la diferencia de potencial se usa la notación siguiente: $\mathbf{\Delta_{PQ}}$, no se debe perder de vista que se refiere a la diferencia de potencial entre el punto final Q y el punto inicial P. Es una nomenclatura útil, pero, se debe usar con cuidado para no cometer errores de interpretación

$$\boxed{\Delta_{PQ} = V_Q - V_P = \Sigma r_i - \Sigma e_j}$$

algunos ejemplos:

En el circuito de la figura 4 la fem de la pila es **e = 1.5 Volt**, la resistencia **R= 100Ω** y el voltímetro marca **1.3 Volt**. Con esos datos calcular el valor de la resistencia interna **r**.

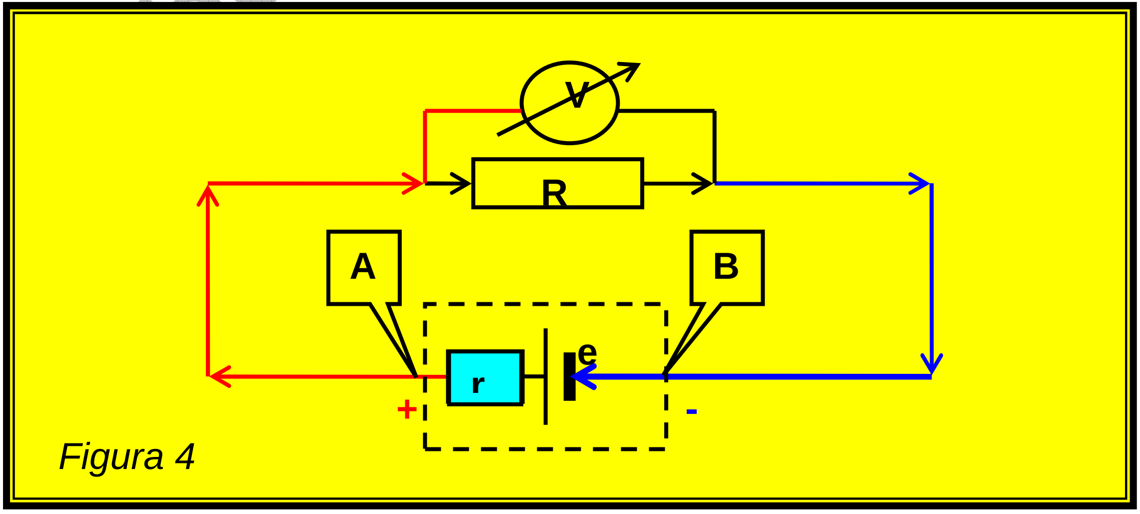

Figura 4

Cuadro de datos:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(A)	V(V)
R	100	¿?	1.3
r	¿?	¿?	¿?
$R_t = R + r$	¿?	¿?	¿?
e	-	-	1.5

Observando la tabla se puede inferir que el voltaje correspondiente a $\mathbf{R_t}$ es igual a **e,** o sea **1.5 Volt.**

Por otra parte se puede calcular el valor de la intensidad total **i** del ciercuito en serie:

$$i = \frac{V}{R} = \frac{1.3\text{Volt}}{100\Omega} = 0.013\text{A}$$

Finalmente la caída de potencial en r = e-VR = 1.5 Volt-1.3Volt=0.2 Volt

Ahora el cuadro queda así:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)
R	100	0.013	1.3
r	¿?	0.013	0.2
$R_t = R + r$	¿?	0.013	1.5
e	-	-	1.5

Con esta nueva tabla es fácil calcular el valor de **r:**

$$r = \frac{V_r}{i_r} = \frac{0.2\text{Volt}}{0.013\text{Amp}} = 15.38\Omega$$

Se puede calcular también $\mathbf{R_t}$ dividiendo el valor de **V** correspondiente a $\mathbf{R_t}$ entre la intensidad que circula por ella $\mathbf{i_t}$, este cociente debe dar **115.38 Ω,** que es igual a la suma de **R + r,** esto funciona como prueba de la validez del resultado obtenido para **r .**

Cuadro de soluciones

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)
R	100	0.013	1.3
r	15.38	0.013	0.2
$R_t = R + r$	115.38	0.013	1.5
e	-	-	1.5

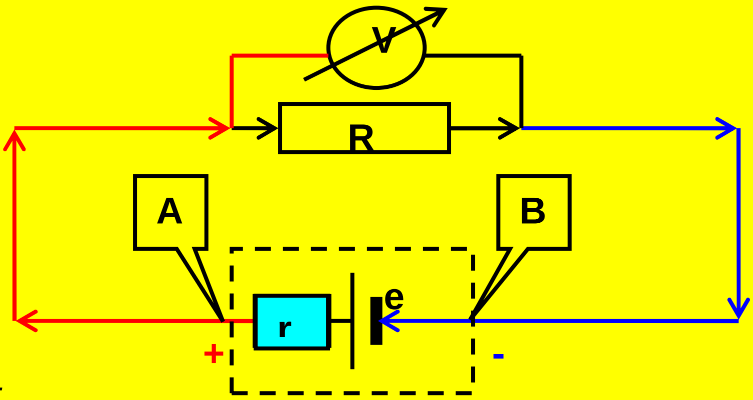

Figura 5

El diagrama de la figura 5 es similar al de la figura 4, ahora la resistencia **R representa una calculadora**, los datos son los siguientes:

e = 1.5 Volt **R** = 9.5Ω **r** = 0.5Ω

Calcular:

1.- La intensidad de la corriente que circula por el circuito.
2.- El valor que marca el voltímetro V.
3.- La caída de potencial en la resistencia interna **r.**
4.- La potencia entregada por la pila.
5.- La potencia útil disipada en las resistencia **R.**
6.- La potencia perdida disipada en las resistencia **r**.
7.- El porcentaje de potencia perdida por **r** como calor.
8.- La energía perdida en **r** en dos horas de trabajo.

Tabla de datos

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)	Pot (Watt)
R	9.5	¿?	¿?	¿?
r	0.5	¿?	¿?	¿?
$R_t = R + r$	¿?	¿?	¿?	¿?
e	--	--	1.5	¿?

Solución:

En principio se puede calcular el valor de la resistencia total $\mathbf{R_t}$ que será igual a la suma de las dos resistencias en serie, **10Ω.**

Luego se coloca la caída de potencial de la resistencia $\mathbf{R_t}$ que será igual al valor de la fuerza electro motriz **e,** o sea **1.5 volt.**

A continuación, con estos valores, podemos calcular la intensidad de la corriente que circula por el circuito en serie:

$$\boxed{i = \frac{e}{R_t} = \frac{1.5\text{Volt}}{10\Omega} = 0.15\text{Amp}}$$

:

tabla de valores intermedios:

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)	Pot (Watt)
R	9.5	0.15	¿?	¿?
r	0.5	0.15	¿?	¿?
$R_t = R + r$	10	0.15	1.5	¿?
e	--	0.15	1.5	¿?

Para terminar calculamos las caídas de tensión en **R** y **r** que serán:

$$V_R = R \times i_R = 9.5\Omega \times 0.15 Amp = 1.425 Volt \qquad V_r = r \times i_r = 0.5\Omega \times 0.15 Amp = 0.75 Volt\ .$$

Con estos elementos se puede calcular la potencia disipada en las resistencias **Pot=Ri²** o bien **Pot = Vi.**

Tabla final de resultados

Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)	Pot (Watt)
R	9.5	0.15	1.425	0.21375
r	0.5	0.15	0.075	0.01125
$R_t = R + r$	10	0.15	1.5	0.225
e	--	0.15	1.5	0.225

En esta tabla se encuentran las respuestas 1 a 6 inclusive.

Cálculo del porcentaje de pérdida de potencia en r:

$$porcentaje = \frac{Pot_r}{Pot_e} \times 100 = \frac{0.01125}{0.225} \times 100 = 5\%$$

Cálculo de la energía perdida en **r** en 2 horas:

$$E = Pot_r \times t = 0.01125\ watt \times 7200\ seg = 81\ Joule$$

Tabla de resultados:

1	2	3	4	5	6	7	8
0.15A	1.425V	0.075V	0.225W	0.21375W	0.01125W	5%	81Joule

NOTAS:

1.- En la columna **V** se verifica que se cumple la ley de las mallas de Kirchhoff.

2.- En la columna de potencia **(Pot)** se puede ver que la suma de las potencias disipadas en los elementos es igual a la potencia aplicada

Ejemplo:

Cuando a una pila se le conecta en serie una resistencia $\mathbf{R_1 = 9\Omega}$ circula por el circuito una intensidad de corriente $\mathbf{i_1 = 0.3}$ **Amp** y cuando se conecta una resistencia $\mathbf{R_2 = 19\Omega}$ circula una intensidad de corriente $\mathbf{i_2 = 0.15}$ **Amp**. Calcular los valores de la fem **e** y de la resistencia interna **r** de la pila.

La figura 5 corresponde al problema con los instrumentos de medición, voltímetro y amperímetro ideales conectados

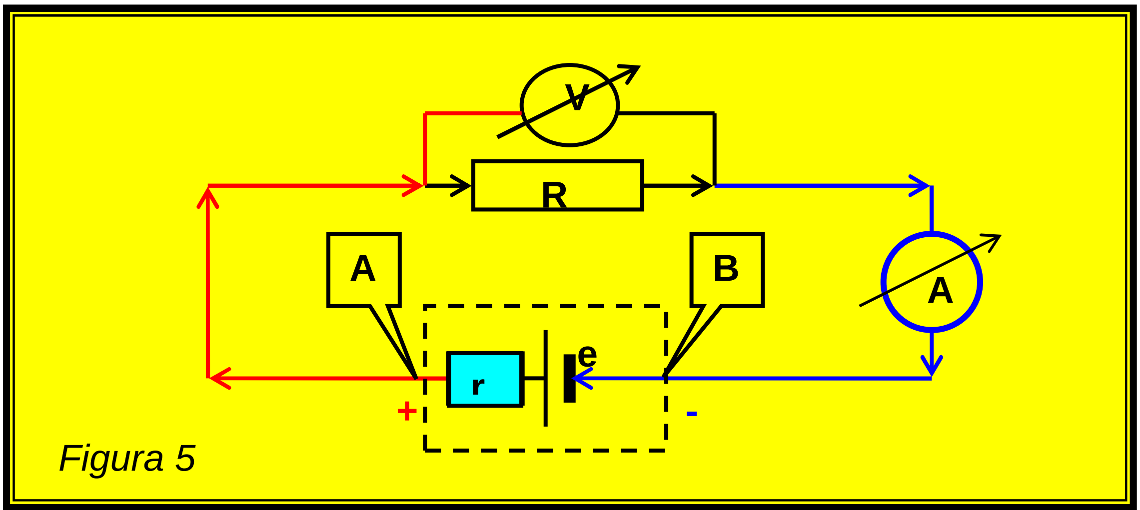

Figura 5

Por efectuarse un cambio de resistencia, el planteo genera dos condiciones iniciales diferentes, por lo tanto la tabla estará separada en dos colores, fucsia y canela.

Tabla de datos:

	Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)
Primera condición	R_1	9	0.3	¿?
	r	¿?	¿?	¿?
	e	¿?	¿?	¿?
Segunda condición	R_2	19	0.15	¿?
	r	¿?	¿?	¿?
	e	¿?	¿?	¿?

Con los datos podremos calcular las caídas de potencial en $\mathbf{R_1}$ **y** $\mathbf{R_2}$ también por observación tendremos las intensidades que circulan por **r** en cada caso.

Caída de potencial en R_1

$$V_1 = R_1 \times i_1 = 9\Omega \times 0.3\text{Amp} = 2.7\text{Volt}$$

Caída de potencial en R_2

$$V_1 = R_2 \times i_2 = 19\Omega \times 0.15\text{Amp} = 2.85\text{Volt}$$

Tabulando los valores tendremos:

Tabla de valores intermedios:

	Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)
Primera condición	R_1	9	0.3	0.27
	r	¿?	0.3	¿?
	e	--	0.3	¿?
Segunda condición	R_2	19	0.15	2.85
	r	¿?	0.15	¿?
	e	--	0.15	¿?

Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff se plantéa un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} R_1 \times i_1 + r \times i_1 = e \\ R_2 \times i_2 + r \times i_2 = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\Omega \times 0.3\text{Amp} + r \times 0.30\ \text{Amp} = e \\ 19\Omega \times 0.15\text{Amp} + r \times 0.15\ \text{Amp} = e \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución: **e = 3 Volt r = 1Ω**

Tabla de valores finalles:

	Valores en base a la resistencia	R(Ω)	i(Amp)	V(Volt)
Primera condición	R_1	9	0.3	0.27
	r	1	0.3	0.3
	e	--	0.3	3
Segunda condición	R_2	19	0.15	2.85
	r	1	0.15	0.15
	e	--	0.15	3

Como prueba se puede verificar que en la columna V (Volt) se verifica la ley de las mallas de Kirchhof en cada una de las secciones

. El tema siguiente no te trata específicamente en el curso de biofísica, pero se agrega como un adicional que puede ser útil.

Conexión de resistencias en serie y en paralelo

Cuando se necesita obtener una fuente de tensión de cierto valor es posible conectar 2 o más pilas en serie, en este caso se tendrá una fuente equivalente al conjunto cuya **fuerza electro motriz** es **igual** a la **suma** de las **fuerzas electromotrices de las pilas** que integran el conjunto.

La **resistencia interna** del conjunto es **igual** a la **suma** de las **resistencias internas** de cada una de las pilas componentes. *Figura 6a*

Cuando no se necesita aumentar la fem, pero se requiere mucha intensidad de corriente, se conectan las pilas en paralelo- En este caso la **fem** es **la misma de las pilas** y la **resistencia interna** es igual a la inversa de la suma de las inversas de la resistencia de cada una de las pilas, en otras palabras, la resistencia del sistema es **igual al conjunto de resistencias internas** consideradas como conexión **en paralelo**. *Figura 6b.*

Las **pilas** que se conectan **en paralelo** deben tener **la misma fem** para evitar que se genere una corriente en el interior del sistema que descargará unas pilas haciendo pasar corriente eléctrica sobre otras..

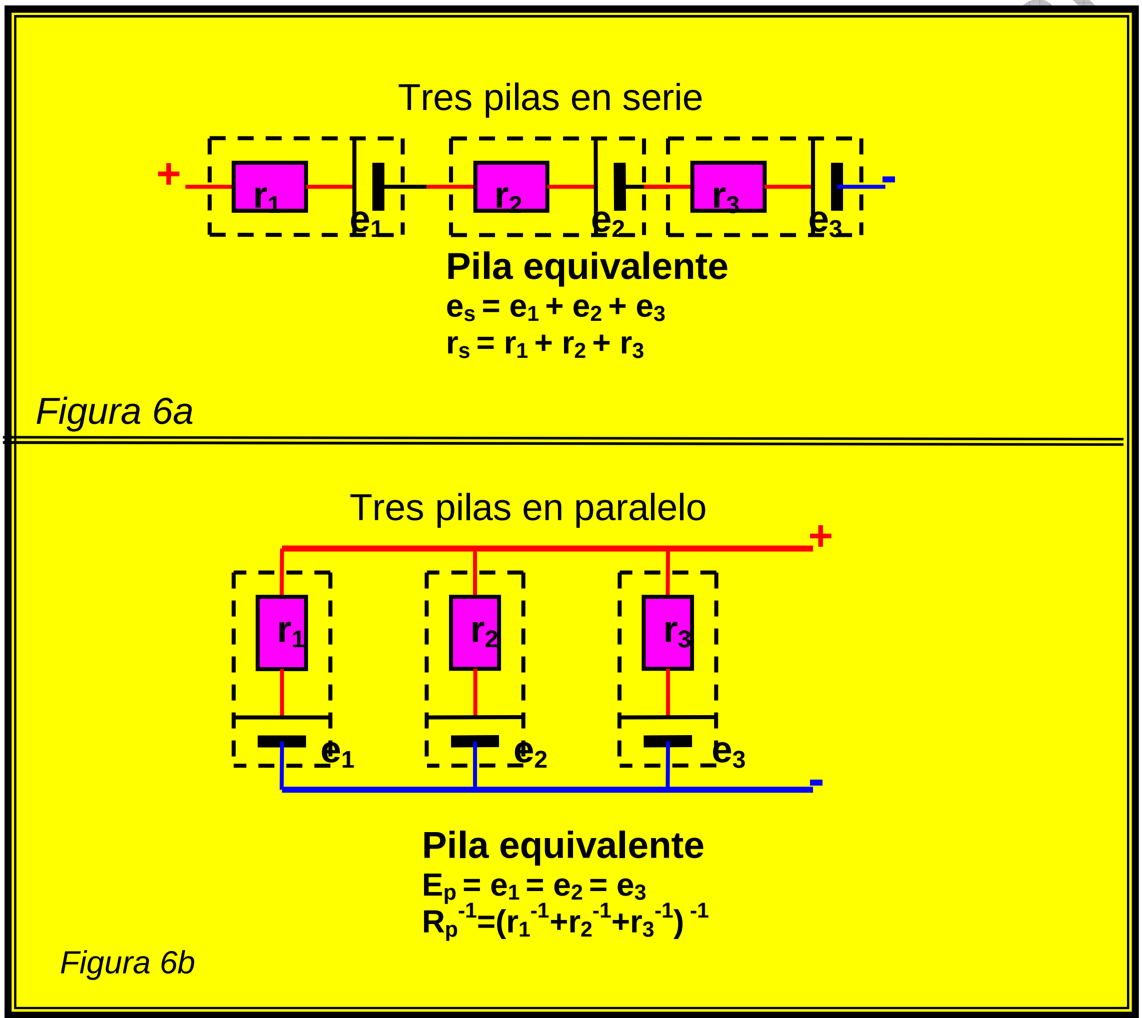

Figura 6a

Figura 6b

Ejemplo de conexión de pilas en serie

Se dispone de tres pilas de fuerza elctro motriz **e=1,5 volt** y resistencia interna **r=0.01Ω**

Si las pilas se conectan en serie, cuánto valen la fem y la resistencia interna de la pila equivalente al conjunto.

$$e_s = e_1 + e_2 + e_3 = 1.5 \text{ Volt} + 1.5 \text{ Volt} + 1.5 \text{ Volt} = 4.5 \text{ Volt}$$

$$e_s = 4.5 \text{ Volt}$$

$$r_s = r_1 + r_2 + r_3 = 0.01\Omega + 0.01\Omega + 0.01\Omega = 0.03\ \Omega$$

$$r_s = 0.03\ \Omega$$

Ejemplo de conexión de pilas en paralelo:

Las tres pilas del ejemplo anterior se conectan en paralelo, calcular la fem y la resistencia interna equivalente del conjunto.

$$e_p = e_1 = e_2 = e_3 = 1.5 \text{ Volt}$$

$$e_p = 1.5 \text{ Volt}$$

$$r_s^{-1} = r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} = (0.01\Omega)^{-1} + (0.01\Omega)^{-1} + (0.01\Omega)^{-1} = (300\ \Omega)^{-1}$$

$$r_s = 0.003\ \Omega$$