TETRAVECTORES Y TENSORES

El desarrollo matemático de la Teoría Especial de la Relatividad plantea la necesidad de utilizar un espacio compuesto de cuatro coordenadas, es decir, todo suceso del referido espacio debe estar identificado por por cuatro componentes, una función del tiempo y tres establecidas por el espacio ordinario, en consecuencia las componentes deberán ser: (*ct, x, y, z).* En la práctica se suelen reemplazar las indicadas por: (x_1 ,x_2 , x_3 ,x_4 *).*

Estos vectores definidos en el espacio de cuatro dimensiones se pueden considerar como las componentes de un radio vector tetradimensional, o bien como un tetra-radiovector de un espacio también tetradimensional.

Las componentes de este tetravector se designan mediante x^{μ}, donde μ toma los valores 0, 1, 2, y 3, de manera que:

$$x^0 = ct \qquad x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z$$

El cuadrado de la "longitud" del tetravector está dado por la expresión:

$$(X^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Se puede demostrar que este cuadrado es invariante en toda rotación del sistema de coordenadas tetradimensional. Por ejemplo la transformación de Lorentz.

En general se llama vector tetradimensional o tetravector A^{μ} al conjunto de cuatro magnitudes A^0 ,A^1 , A^2, A^3, tales que cuando se transforma el sistema de coordenadas tetradimensional se transforman ellas a su vez lo mismo que las componentes de un de un tetraradiovector x^{μ}.

Para la transformación de Lorentz.

$$A^0 = \frac{A^0 + \frac{V}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad A^1 = \frac{A^1 + \frac{V}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad A^2 = A^2 \qquad A^{!3} = A^{!3}$$

El cuadrado de la magnitud de cualquier tetravector se determina de manera análoga al cuadrado de un tetra-radiovector:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Para hacer mas cómoda la escritura de las expresiones de este tipo se se introducen dos clases de componentes de los tetravectores, a saber:

Componentes contravariantes A^{μ}

Componentes covariantes A_{μ}

La relación existente entre las dos formas es la siguiente:

$$A_0 = A^0 \qquad A_1 = -A^1 \qquad A_2 = -A^2 \qquad A_3 = -A^3$$

El cuadrado del tetravector se puede expresar bajo la forma:

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} A_{\mu} = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$$

Esta expresión se puede escribir en forma abreviada como sigue:

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} A_{\mu} = A^{\mu} A_{\mu}$$

Esta forma responde a la convención de Einstein según la cual se deberá efectuar la sumatoria sobre los índices que se repiten en los dos factores del producto. En este caso se trata de μ. Las letras que se repiten y que según la convención generan la sumatoria se llaman índices mudos.

PRODUCTO ESCALAR DE DOS TETRAVECTORES.

Dados los tetravectores **A** y **B** definiremos su producto escalar mediante la siguiente expresión:

$$A^{\mu}B_{\mu} = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3$$

Esta expresión es equivalente a $A_{\mu}B^{\mu}$, o sea:

$$A^{\mu}B_{\mu} = A_{\mu}B^{\mu}$$

habida cuenta de que sus valores intrínsecos no se alteran, solo cambia la forma de expresar los subíndices o supraíndices, pero, el producto escalar permanece invariable.

En general todo par de índices mudos se pueden cambiar de lugar sin que altere el resultado de la operación.

El producto $A^{\mu}B_{\mu}$ es un tetraescalar invariante con respecto a los giros del sistema de coordenadas tetradimensional.

La componente A^0 se llama temporal mientras que las otras tres se llaman espaciales.

El cuadrado de un tetravector puede ser positivo, negativo o nulo, en estos casos se dice respectivamente que son: cuasitemporales, cuasiespaciales y nulos.

Se llaman giros espaciales puros los que no afectan el eje del tiempo, en este caso las tres componentes espaciales del tetravector A^{μ} costituyen un vector tridimencional **A**, la componente temporal en este caso representa un escalar tridimencional, entonces como consecuencia de ello se suele escribir el tetravector con sus componentes contravariantes así:

$$A^{\mu} = (A^0 , \mathbf{A}).$$

Las componentes covariantes de este mismo tetravector serán ahora:

$$A_{\mu} = (A^0 , -\mathbf{A})$$

y el cuadrado del tetravector:

$$A^{\mu}A_{\mu} = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$$

Lo dicho aplicado a un tetra-radiovector será:

$$x^{\mu} = (ct, \mathbf{r}), \quad x_{\mu} = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^{\mu} x_{\mu} = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2$$

En los vectores tridimensionales no es necesario distinguir entre componentes covariantes y contravariantes, en este caso además no se usan letras griegas para expresar componentes, se usan letras latinas con las componentes abajo, es decir:

$$A_i \ (i=x,y,z)$$

El producto escalar será:

$$\mathbf{AB} = A_i B_i$$

TENSORES

El conjunto de las 16 cantidades $A_{\mu\nu}$ que se obtienen del producto escalar anterior, que en las transformaciones lineales se transforman como las componentes de un tetravector se llama tensor tetradimensional (o tetratensor) de segundo orden.

Las componentes de un tetratensor de segundo orden se pueden representar de tres formas diferentes según se indica:

Contravariantes	$A^{\mu\nu}$
Covariantes	$A_{\mu\nu}$
mixtas	$A^{\mu}{}_{\nu}$

En el caso mixto se debe distinguir entre $A^{\mu}{}_{\nu}$ y $A_{\mu}{}^{\nu}$, en otras palabras, debe quedar claro cuál es el supraíndice y cuál el subíndice.

Existe una relación entre las componentes expresadas de distinta forma, ella se de las distintas formas se puede expresar mediante la siguiente regla:

a) La elevación o el descenso del índice temporal (0) no hace variar el signo de la componente.

b) La elevación o descenso de uno de los índices espaciales (1, 2, 3) convierte el signo de la componente en su opuesto.

Ejemplos :

$A_{00}= A^{00}$	$A_{01} = -A^{01}$	$A_{11} = A^{11}$	...	...
$A^{0}{}_{0} = A^{00}$	$A^{1}{}_{0} = A^{10}$	$A_{1}{}^{0} = -A^{10}$	$A_{0}{}^{1} = -A^{01}$	$A^{1}{}_{1} = -A^{11}$

En una transformación espacial pura, nueve componentes:

$$A^{11}, A^{12},..., A^{33}$$

Determinan un tensor tridimencional.

Tres componentes A^{01}, A^{02}, A^{03} y tres componentes A^{10}, A^{20}, A^{30}, constituyen vectores tridimencionales y la componente A^{00} es un escalar tridimencional.

Los tensores se pueden clasificar en simétrios y antisimétricos, de la siguiente manera:

Tensor simétrico

Un tensor $A^{\mu\nu}$ se llama simétrico si:

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$$

Tensor antisimétrico

Un tensor $A^{\mu\nu}$ se llama antisimétrico si:

$$A^{\mu\nu} = - A^{\nu\mu}$$

Se destacan las siguientes propiedades:

En todo tensor antisimétrico las componentes diagonales:

$$A^{00}, A^{11}, ..., A^{33}$$

son nulas.

Mientras que en todo vector simétrico las componentes mixtas coinciden:

$$A^{\mu}{}_{\nu} = A^{\nu}{}_{\mu}$$

Igualdad de tensores:

Dos tensores son iguales si las componentes que contienen los mismos índices libres son iguales y se encuentran dispuestas de la misma manera.

En una igualdad de tensores se pueden cambiar de lugar los índices libres, sibirlos o bajarlos, pero, haciéndolo en todas las componentes en que se encuentren, solo con esa precaución se conservará la igualdad.

No es lícito igualar componentes de índices covariantes con otros cuyos ídices sean contravariantes.

Traza de un tensor y contración:

Con las componentes de un tensor se puede obtener un escalar mediante la suma:

$$A^{\mu}{}_{\mu} = A^{0}{}_{0} + A^{1}{}_{1} + A^{2}{}_{2} + A^{3}{}_{3}$$

Este escalar se llama traza del tensor y la operación por la cual se forma se llama contracción del tensor.

También se puede lograr la contacción efectuando el producto escalar de dos tetravectores, $A^{\mu} B_{\mu}$, partiendo de dos tensores.

En general, toda toda contracción sobre un par de índices disminuye en 2 el rango del tensor. Por ejemplo, $A^{\mu}{}_{\nu\lambda\mu}$ es un tensor de segundo rango, $A^{\mu}{}_{\nu}\ B^{\nu}$ es un tetravector y $A^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$ es un escalar, etc.

Tetratensor unitario

Se llama tetratensor unidad o unitario a un tensor $\delta^{\nu}{}_{\mu}$ para el que se cumple la siguiente igualdad:

$$\delta^{\nu}{}_{\mu}\ A^{\mu} = A^{\mu}$$

con cualquier tetravector A^{μ}.

La definición del tensor unitario $\delta^{\nu}{}_{\mu}$ es:

$$\delta^{\nu}{}_{\mu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = \nu \\ 0 \text{ si } \mu = \nu \end{cases}$$

el valor de la traza correspondiente será igual a 4.

Si en un tensor $\delta^{\nu}{}_{\mu}$ subimos un índice o bajamos el otro obtenemos un tensor que se designa por medio de $g^{\mu\nu}$ o bien $g_{\mu\nu}$ y que se llama tensor métrico, éstos tensores tienen componentes iguales que se pueden representar en forma de matriz

$$\left| g^{\mu\nu} \right| = \left| g_{\mu\nu} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Es evidente que:

$$g^{\mu\nu}A_{\nu} = A^{\mu} \quad \text{y} \quad g_{\mu\nu} = A_{\nu} = A^{\mu}$$

con lo cual se efectúa la notación tensorial de las operaciones de subida o bajada de índices.

Finalmente considramos algunas operaciones del diferenciales e integrales del análisis tensorial tetradimensional

Se llama tetragradiente de un una función escalar ϕ al tetravector:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right)$$

Se debe tener en cuenta que las derivadas indicadas se deben tomar como las componentes covariantes del tetravector.

También será un escalar

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$$

En general los operadores diferenciales respecto a las coordenadas $x^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, deben considerarse como componentes covariantes del tetravector operador.

En el espacio tridimencional la integración se puede hacer sobre una superficie, un volumen o una curva; mientras que en el espacio tetradimensional son posibles cuatro tipos de integraciones:

1. Curvilinea en el espacio tetradimensional
2. De superficie (bidimensional)
3. De hipersuperficie o superficie tridimensional
4. De volumen tetradimensional.

Existen teoremas, análogos a los de Gauss y Stockes del análisis vectorial tridimensional que permiten la transformación de unas integrales tetradimecionales en otras. El mas usado en física teórica es el que transforma la integral de volumen tetradimensional en integral de hipersuperficie.

El elemento de integración de volumen tetradimensional

$$d\Omega = dx^{0}dx^{1}dx^{2}dx^{3} = cdtdV$$

es un escalar.

El elemento de integración de hipersuperficie dS^μ es un tetravector cuyo valor es igual al "área" del elemento de hipersuperficie y cuya dirección es normal a este elemento.

La generalización del teorema de Gauss es la siguiente:

Una integral extendida a una hipersuperficie cerrada se puede transformar en la integral del volumen tetradimensional encerrado en ella, sustituyendo el el elemento de integración dS_μ por el operador $d\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, por ejemplo:

$$\oint A^\mu dS_\mu = \int \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega$$

BIBLIOGRAFÍA

Curso abreviado de física teórica. Landau Lifshitz. Edit. Mir

Vectores y Tensores. Luis Santaló. Eudeba

Algebra lineal. Golovina. Editorial Mir

Fundamentos de la Teoría Electromagnética. Reitz y Milford. UTEA.